Đề bài

Cho trường vector:

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(x^2 + y^2 - y,\ \frac{x^2+y^2}{x},\ z\right).$$

C: đường tròn đơn vị tâm O, nằm trong mặt phẳng Oxy, hướng ngược chiều kim đồng hồ khi nhìn từ trục $+z$.

Mục tiêu

(a) Chứng minh

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s} \neq 0$$

mặc dù

$$\nabla \times \vec{F} = \vec{0}.$$

$\Rightarrow$ Có mâu thuẫn Stokes không?
(b) Hỏi $\vec{F}$ có bảo toàn không?

Phần (a) — Tính tích phân đường

Bước 1: Tham số hoá đường tròn C

Vì C là đường tròn đơn vị trong Oxy:

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = 0, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Đúng hướng (ngược chiều kim đồng hồ nhìn từ trên xuống).

Bước 2: Tính $d\vec{s}$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = (-\sin t,\ \cos t,\ 0) \quad \Rightarrow \quad d\vec{s} = (-\sin t,\ \cos t,\ 0)\, dt.$$

Bước 3: Tính $\vec{F}$ trên C

Trên C: $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$.

$$\vec{F} = (-\sin t,\ \cos t,\ 0).$$

Bước 4: Tích vô hướng

$$\vec{F} \cdot d\vec{s} = (-\sin t,\ \cos t, 0) \cdot (-\sin t,\ \cos t, 0)\, dt = (\sin^2 t + \cos^2 t)\, dt = dt.$$

Bước 5: Lấy tích phân

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

Kết luận 1:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = 2\pi \neq 0.$$

Phần (a) — Tính curl $\vec{F}$

Bước 6: Tính $\nabla \times \vec{F}$

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -x^2 + y^2 & \frac{x^2+y^2}{x} & z \end{vmatrix}.$$

Thành phần k:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2+y^2}{x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2 - y) = 0.$$

Thành phần khác cũng bằng 0.

$$\nabla \times \vec{F} = \vec{0} \quad \text{(với } (x, y) \neq (0, 0)\text{)}.$$

Có mâu thuẫn Stokes không?

Không hề mâu thuẫn. Stokes chỉ đúng khi trường vector xác định và trơn trên toàn bộ mặt S. Ở đây $\vec{F}$ không xác định tại $(0, 0)$. Mọi mặt S có biên là đường tròn đều bắt buộc chứa gốc O. Tức là mặt không nằm trọn trong miền xác định của $\vec{F}$.
$\Rightarrow$ Không đủ điều kiện áp dụng Stokes.

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s} \neq \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n}\, dS.$$

Phần (b) — Trường có bảo toàn không?

Định nghĩa

Một trường vector bảo toàn $\Leftrightarrow \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$ với mọi đường kín.

Áp dụng

Ta đã có:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = 2\pi \neq 0.$$

$\Rightarrow$ Không bảo toàn.

Giải thích sâu hơn

Miền xác định: $\mathbb{R}^3 \setminus \{z\text{-axis}\}$. Miền này không đơn liên. Curl = 0 không đủ để bảo toàn nếu miền không đơn liên.

Kết luận cuối cùng

Câu hỏi	Trả lời
$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$	2π
Curl $\vec{F}$	0
Mâu thuẫn Stokes?	Không
$\vec{F}$ bảo toàn?	Không

Câu nhận diện nhanh đi thi

"Curl = 0 nhưng miền thủng $\Rightarrow$ vẫn có thể tích phân $\neq 0$."